Espacio con producto interno p-ádico

Seminario del Grupo de Investigación en Análisis Funcional y Ecuaciones de Evolución

Universidad de Santiago

`jaguayo@udec.cl`

José Aguayo

Durante la presentación, $\mathbb{K}$ será un cuerpo con una valuación no-arquimedeana $|\cdot|$, con la cual $\mathbb{K}$ es un espacio ultramétrico completo (ejemplos, $\mathbb{Q}_p$, el cuerpo Levi Civita $\mathcal{R}$), X será un espacio de Banach no-arquimedeano (es decir, la desigualdad triangular será $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$).

Definicion 1 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach no-arquimedeano. Diremos que* X *es un Banach Libre si existe una familia* $(e_i)_{i \in I}$ *de elementos de* X *tal que, cualquier* $x \in X$*, se escribe como*

$$x = \sum_{i \in I} x_i e_i, \; x_i \in \mathbb{K} \tag{1}$$

y

$$\|x\| = \sup_{i \in I} |x_i| \, \|e_i\|$$

Notar que, en el contexto no-arquimedeano, (1) es equivalente a

$$\lim_i |x_i| \, \|e_i\| = 0.$$

1. Si el cuerpo es de valuación discreta, es decir, $|\mathbb{K} \setminus \{0\}| = \langle\rho\rangle$, entonces, cualquier especio de Banach tal que $\|X\| \subset |\mathbb{K}|$, admite una base ortonormal. La situación cambio si la valuación no es discreta.
2. Un Banach Libre es isomorfo a $c_0\left(I, \mathbb{K}, (\|e_i\|)_{i\in I}\right)$, donde

$$\left\{ x : I \to \mathbb{K} / \; x = \sum_{i\in I} x_i e_i \; ; \; \lim_i |x_i| \, \|e_i\| = 0 \right\} \tag{2}$$

provisto de la norma $\|x\| = \sup_{i\in I} |x_i| \, \|e_i\|$. En consecuencia, podemos hacer el estudio en este último espacio.

Un caso particular en (2) es

$E_\omega = c_0\left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, \left(|\omega_i|^{1/2}\right)_{i\geq 0}\right)$, donde $(\omega_i)_{i\geq 0} \subset \mathbb{K}$ y $\omega_i \neq 0$. Un espacio de este tipo se es llamado un espacio p-Hilbert. Es claro que

$$x = (x_i)_{i\geq 0} \in E_\omega \iff \lim_{i\to\infty} x_i^2\omega_i = 0.$$

Notar que

$$\|e_i\| = |\omega_i|^{1/2}$$

Definicion 2 *Sea* X *un espacio de vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y sea* $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$. *Diremos que* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es un producto interno si*

1. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle \neq 0$
2. $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle\,;\ a, b \in \mathbb{K}.$
3. $|\langle x, y\rangle|^2 \leq |\langle x, x\rangle|\,|\langle y, y\rangle|\,.$

La dupla $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se conocerá como espacio con producto interno. Si $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ se dirá que el producto interno es simétrico.

Proposicion 3 *Un espacio con producto interno* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *induce una norma no-arquimedeana, digamos*

$$\|x\| = |\langle x, x\rangle|^{1/2}. \tag{3}$$

Ejemplos 4 *Consideremos el espacio* $X = \mathbb{K}^2$. *Se define*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} x_1 y_1 & |y_1| \geq |y_2| \\ x_2 y_2 & |y_1| < |y_2| \end{cases}$$

Esta función resulta ser un producto interno que induce la norma del máximo en $\mathbb{K}^2$.

Lo siguiente da condiciones necesarias y suficientes para que la norma provenga de un p. i.

Teorema 5 *Para cualquier espacio de Banach X, son equivalentes:*

1. *X admite un p. i. que induce la norma inicial.*
2. *$\|X\| \subset |\mathbb{K}|^{1/2}$ y para cada subespacio 1-dimensional E de X, $\exists$ un subespacio F de X tal que $X = E \oplus F$ y que, $x \in E$, $y \in F$ y $a, b \in \mathbb{K}$, $\|ax + by\| = \max\{\|ax\|, \|by\|\}$.*
3. *Existe una aplicación $\Phi : X \to X'$; $y \to f_y$ tal que $\|f_y\| = \|y\|$ y $|f_y(y)| = \|y\|^2$, para todo $y \in X$.*

De 3., podemos definir

$$\langle x, y \rangle_{\Phi} = f_y(x)$$

y mostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Phi}$ es un producto interno que induce la norma inicial. Notar que no es, en general, simétrico y, por cada función Φ, tenemos un producto interno.
En el resto de la presentación, daremos condiciones para que

$$E_{\omega} = c_0\left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, \left(|\omega_i|^{1/2}\right)_{i \geq 0}\right)$$

tenga un producto interno simétrico.

Se define la forma bilineal simétrica siguiente:
para $x = \sum_{i \geq 0} x_i e_i \in E_\omega, \; y = \sum_{i \geq 0} y_i e_i \in E_\omega$,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E_\omega \times E_\omega \to \mathbb{K}; \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i \geq 0} x_i y_i \omega_i.$$

Se puede ver, con cierta facilidad que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, ,$$

Incluso, se puede tener

$$|\langle x, y \rangle| < \|x\| \, \|y\| \, .$$

Teorema 6 *La forma bilineal arriba definida es un producto interno en* E_ω *que induce la norma si, y sólo si, la clase residual de* $\mathbb{K}$ *es formalmente real.*

Corolario 7 *Si $\mathbb{K}$ tiene clase risidual formalmente real, entonces*

1. *para una colección finita de elementos de $a_i \in \mathbb{K}$, tal que $|a_i| = c$, se tiene*

$$\left|\sum_k a_i^2 \omega_i\right| = c^2.$$

2. *para $x, y \in E_\omega$,*

$$|\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle| = \max\left\{|\langle x, x\rangle|, |\langle y, y\rangle|\right\}.$$

Recordemos que, en el caso clásico, se tiene que

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\| \Rightarrow y = ax.$$

Esa propiedad se pierde en este contexto. En efecto, en $\mathbb{K}^3$ y con $\omega_i = 1$, se tiene que para $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, no existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $y = ax$, pero $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\| = 1$.

Dado un subespacio cerrado M, quisieramos tener un complemento $M^{\perp}$ tal que

$$E_{\omega} = M \oplus M^{\perp}.$$

Esta propiedad es válida para cualquier espacio de Hilbert en el caso clásico. Para el caso no-arquimedeano, la propiedad, en general, falla en aquellos espacios con producto interno. Un contraejemplo de esta situación es algo bastante técnico. A pesar de ésto, hay respuesta parciales en las situaciones en que el producto interno es simétrico.

Definicion 8 *Sean dos subespacios* $D_1, D_2 \leq E_\omega$. *Diremos que* D_2 *es complemento normal de* D_1 *si*

$$x \in D_1, y \in D_2 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

y

$$E_\omega = D_1 \oplus D_2.$$

Definicion 9 *Una sucesión* $(x_n)_{n \geq o}$ *de* E_ω *se dice sucesión normal si*

$$\langle x_n, x_m \rangle = 0, \ \textit{para } n \neq m$$

y diremos que es una sucesión ortonormal si, además,

$$\|x_n\| = 1, \ n \in \mathbb{N}$$

Se puede demostrar que si D es una familia ortonormal, entoces satisface lo siguiente:

$$x, y \in D,\ a, b \in \mathbb{K}; \|ax + by\| = \max\left\{\|ax\|, \|by\|\right\}.$$

Esta última propiedad se llama ortogonalidad. Otro interesante hecho que se obtiene es el Teorema de Gram-Schmidt, el cual nos permite disponer, a partir de una familia dada, otra la cual resulta ser una familia ortonormal.
A continuación, daremos condiciones necesarias para que un subespacio cerrado tenga un complemen normal.

Definicion 10 *Si una sucesión* $(x_i)_{i\geq 0}$ *de* E_ω *satisface* $\langle x, x_i\rangle \longrightarrow 0$, *para cualquier* $x \in E_\omega$, *entonces diremos que* $(x_i)_{i\geq 0}$ *tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue.*

Un ejemplo de sucesión con la Propiedad de Riemann- Lebesque es cualquier base de E_ω.

Teorema 11 *Si* $S \subset E_\omega$ *es un cojunto finito o es una sucesión que tiene la Propiedad de Riemann-Lebesgue, entonces* S *puede ser extendida a una base ortonormal para* E_ω*. Bajo estas condiciones, tenemos* $cl\,[S]$ *tiene un complemento normal* N *tal que*

$$E_\omega = cl\,[S] \oplus N.$$

Otro hecho que podemos destacar es en relación a su dual. Este no es el mismo como resulta ser en el caso clásico. Es conocido que

$$(c_0)' \cong l_\infty,$$

o, más generalmente,

$$E'_\omega \cong l_\infty\left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, (\xi_j)\right) = \left\{ y = (y_j) : \sup_{j \geq 0} |y_j|\, \xi_j < \infty \right\}$$

En consecuencias, existen funcionales lineales continuas en E'_ω que no son funcionales de Riesz, es decir, del tipo

$$x \to \langle x, y \rangle .$$

Teorema 12 *Si $f \in E'_\omega$ es una funcional de Riesz, entonces $N(f)$ tiene un complemento normal $N(f)^\perp$ tal que*

$$E_\omega = N(f) \oplus N(f)^\perp,$$

donde $N(f)^\perp = \{y \in E_\omega : \langle x, y\rangle = 0; x \in N(f)\}$.

La pregunta que podemos hacernos aquí es, cómo identificar una funcional de Riesz. Los siguientes teoremas dán la respuesta.

Teorema 13 *Sea* $f \in E'_\omega$. *Si el subespacio nulo* $N(f)$ *tiene una base ortonormal con la propiedad de Riemann Lebesgue, entonces* f *es una funcional de Riesz.*

Teorema 14 *Si $f \in E'_\omega$ es una funcional de Riesz, entonces toda base ortonormal de $N(f)$ tiene la propiedad de Riemann-Lebesgue.*

[Dem.:]Si $f \equiv 0$, no hay nada que probar. Supongamos f es no nula y sea $(x_n)_{n \geq o}$ una base ortonormal de $N(f)$. Basta mostrar que, para $e_j \notin N(f)$,

$$\lim_{n \to \infty} \langle e_j, x_n \rangle = 0.$$

En efecto, sea $(f\left(e_n\right))_{n\geq 0}$=$(a_n)_{n\geq 0}$ la sucesión generada por la base canonica $(e_n)_{n\geq 0}$ de E_ω; luego, $(a_n)_{n\geq 0} \in l_\infty$. Por la condición de ser f una funcional de Riesz, existe $y \in E_\omega$ tal que $f = \langle y, \cdot\rangle$.

Se define $y - \langle y, y\rangle\, a_j^{-1} e_j$ y notar que

$$\begin{aligned}\left\langle y, y - \langle y, y\rangle\, a_j^{-1} e_j \right\rangle &= \langle y, y\rangle - \langle y, y\rangle\, a_j^{-1} \langle y, e_j\rangle \\ &= \langle y, y\rangle - \langle y, y\rangle\, a_j^{-1} a_j = 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$y - \langle y, y\rangle\, a_j^{-1} e_j \in N\left(f\right).$$

Así,

$$0 = \langle y, x_n \rangle = \left\langle y - \langle y, y \rangle a_j^{-1} e_j, x_n \right\rangle + \langle y, y \rangle a_j^{-1} \langle e_j, x_n$$

implica que

$$\lim_{n \to \infty} \langle y, y \rangle a_j^{-1} \langle e_j, x_n \rangle = - \lim_{n \to \infty} \left\langle y - \langle y, y \rangle a_j^{-1} e_j, x_n \right\rangle$$

pues, $(x_n)_{n \geq o}$ una base ortonormal de $N(f)$ y $y - \langle y, y \rangle a_j^{-1} e_j \in N(f)$.

A continuación, daremos condiciones necesarias y suficientes para que una funcional continua de E_ω sea de Riesz. Definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} e_i' : E_\omega &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longrightarrow e_i'(x) = x_i \end{aligned}$$

donde

$$x = \sum_{i \geq 0} x_i e_i.$$

Es claro que $e_i' \in E_\omega'$ y que

$$\begin{aligned}\|e_i'\| &= \sup_{j\geq 0}\frac{|e_i'(e_j)|}{\|e_j\|}\\ &= \sup_{j\geq 0}\frac{|\delta_{ij}|}{|\omega_j|^{1/2}} = \sup_{j\geq 0}\frac{1}{|\omega_j|^{1/2}}\end{aligned}$$

Notar, además, que

$$\left\langle \frac{e_i}{\omega_i}, x \right\rangle = \frac{1}{\omega_i}x_i\omega_i = x_i = e_i'(x),$$

es decir, la funcional e_i' es de Riesz. Consideremos la clausura del subespacio generado por $\{e_i' : i \geq 0\}$.

Proposicion 15

$$cl\left[\{e_i' : i \geq 0\}\right] \cong c_0\left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, \left(\frac{1}{|\omega_j|^{1/2}}\right)\right) \overset{notación}{=} E_{\omega^{-1}}$$

[Dem.:]Se define

$$\Phi : \left[\{e_i' : i \geq 0\}\right] \longrightarrow E_{\omega^{-1}}$$

por

$$\Phi\left(e_i'\right) = e_i$$

Es fácil ver que Φ es una isometría. Se extiende Φ a

$$\widehat{\Phi} : cl\left[\{e'_i : i \geq 0\}\right] \rightarrow E_{\omega^{-1}}$$

la cual resulta ser, tambien, una isometría. Hagamos ver que es sobreyectiva.
Sea $(a_n) \in E_{\omega^{-1}}$; luego

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \frac{1}{|\omega_j|^{1/2}} = 0.$$

Se define

$$x' = \sum_{n\geq 0} a_n e'_n;$$

como

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \, \|e'_n\| = \lim_{n\to\infty} |a_n| \frac{1}{|\omega_j|^{1/2}} = 0,$$

se tiene que

$$x' \in E'_\omega = l_\infty \left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, \left(\frac{1}{|\omega_j|^{1/2}} \right) \right)$$

y, en particular,

$$x' = \sum_{n\geq 0} a_n e'_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i e'_i \in cl\left[\{e'_i : i \geq 0\}\right].$$

Analicemos, ahora, $\widehat{\Phi}(x')$

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(x') &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(e_i') \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i e_i \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n e_n = (a_n)\,.\end{aligned}$$

Proposicion 16 *Si* $f \in cl\left[\{e_i' : i \geq 0\}\right]$, *entonces* f *es una funcional de Riesz.*

[Dem.:]Es fácil ver que si

$$f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_i',$$

entonces

$$f = \left\langle \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\omega_k} e_k, \cdot \right\rangle.$$

Supongamos que $f \in cl\left[\{e_i' : i \geq 0\}\right]$, luego

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e'_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e'_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\omega_k} e_k, \cdot \right\rangle$$

con

$$\lim_{k\to\infty} |\alpha_k| \, \|e'_k\| = 0$$

y la converencia es uniforme.

Ahora,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_k}{\omega_k}\right|\|e_k\| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_k}{\omega_k}\right||\omega_k|^{1/2}\\ &= \lim_{k\to\infty}|\alpha_k|\frac{1}{|\omega_k|^{1/2}}\\ &= \lim_{k\to\infty}|\alpha_k|\,\|e'_k\| = 0,\end{aligned}$$

luego

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k e_i \in E_\omega$$

Claramente, $f = \langle y, \cdot\rangle$.

References

[1] Diarra, Bertin, Geometry of the p-Adic Hilbert Spaces, (pre-print).

[2] Narici, L. and Beckenstein, A non-archimedian inner product, (to appear in the CNM).

[3] van Rooij, Non- Archimedean Functional Analysis, Dekker, New york, 1978.